КАЛИДОЛДАЙ АЙТОЛҚЫН ҚУАНБАЙҚЫЗЫ

«Торлы кеңістіктердегі сызықты және сызықтық емес операторлардың интерполяциясы»

8D05401 – «Математика» мамандығы бойынша
(PhD) философия докторы дәрежесін алуға ұсынылған диссертацияның аңдатпасы

Зерттеу тақырыбының өзектілігі. Интерполяция теориясының маңызды бағыттарының бірі – нақты функционалдық кеңістіктер жұптары үшін интерполяциялық кеңістіктерді сипаттау және олардың нақты түрлерін зерттеу болып табылады.

Айталық $\mathbb{R}^n$ кеңістігінде μ– n -өлшемді Лебег өлшемі берілсін, ал M – $\mathbb{R}^n$-нің өлшенетін ішкі жиындарының кез келген жүйесі болсын. Әрбір $e \in M$ үшін анықталған және интегралданатын $f(x)$ функциясы үшін келесі функцияны анықтаймыз:

$$\bar{f}(t, M) = \sup e \in M|e| \geqslant t \frac{1}{|e|} | \int_e f(x)dx|, \qquad t > 0,$$

мұндағы $|e| \stackrel{\text{def}}{=} \mu e$ – жиынның өлшемін білдіреді, ал жоғарғы $|e| > t$ болатын барлық $e \in M$ үшін алынады. Егер $\sup\{|e|: e \in M\} = \alpha < \infty$ және $t > \alpha$ болса, онда $\bar{f}(t, M) = 0$ деп аламыз.

Айталық p, q параметрлері $0 < p \leqslant \infty$, $0 < q \leqslant \infty$ шарттарын қанағаттандырсын. Онда $N_{p,q}(M)$ торлы кеңістіктері деп аталатын функциялар класы төмендегідей анықталады: егер $q < \infty$ болса,

$$\| f \|_{N_{p,q}(M)} = \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} \bar{f}(t, M))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

ал $q = \infty$ болғанда

$$\| f \|_{N_{p,\infty}(M)} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} \bar{f}(t, M) < \infty.$$

Бұл кеңістіктер торлы кеңістіктер деп аталады және оларды алғаш рет Е.Д. Нурсултанов енгізіп, зерттеген.

Торлы кеңістіктер функциялар теориясында және математикалық талдауда маңызды рөл атқарады, сонымен қатар гармониялық талдау, операторлар теориясы мен стохастикалық процестер сияқты қолданбалы бағыттарда да қолданыс тапқан.

Бұл диссертациялық жұмыс осы кеңістіктердің интерполяциялық қасиеттерін дамытуға арналған. Атап айтқанда, торлы кеңістіктер Морри кеңістіктеріне M_p^α жақын болып келеді, бұл кеңістіктерді алғаш рет Чарльз Морри 1938 жылы анықтаған:

$$M_p^\alpha = \left\{ f: \quad \sup_{y\in\mathbb{R}^n,\quad t>0} t^{-\lambda} \left(\int_{|x+y|\leqslant t} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

Ал $f(x) \geqslant 0$, $\frac{1}{p} = 1 - \frac{\lambda}{n}$ болғанда

$$\| f \|_{N_{p,\infty}(M)} \asymp \| f \|_{M_1^\lambda}.$$

Морри типті кеңістіктердің интерполяциялық қасиеттері В.И. Буренков пен Е.Д. Нурсултановтың еңбектерінде зерттелген. Егер $N_{p,q}(M)$кеңістігінің анықтамасындағы $\bar{f}(t, M)$ функциясының орнына

$$\sup_{\substack{Q\in M \\ |Q|>t}} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)| dx,$$

функциясын қарастырсақ, онда алынған кеңістік Морри кеңістігімен $M_{p,q}^\alpha$ сәйкес келеді, мұнда $\alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$.

Морри кеңістіктерінің интерполяция мәселесін Компанато мен Мерфи, Стампакина және Петре де зерттеген. Петренің нәтижелерінен келесіні аламыз:

$$(M_p^{\lambda_0}, M_p^{\lambda_1})_{\theta,\infty} \hookrightarrow M_p^\lambda ,$$

мұндағы $\lambda = (1-\theta)\lambda_0 + \theta\lambda_1$. Бласко, Руис және Вега өз еңбектерінде бұл кірістірудің қатаң (strict) екенін көрсетті.

Сол сияқты, торлы кеңістіктер үшін де ұқсас нәтиже бар. Егер M – $\mathbb{R}^n$-дегі кез келген өлшенетін жиындар жүйесі болса, онда

$$\left(N_{p_0,q_0}(M), N_{p_1,q_1}(M)\right)_{\theta,q} \hookrightarrow N_{p,q}(M), \tag{1}$$

мұндағы $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $0 < \theta < 1$, $0 < q \leqslant \infty$.

Осыдан мынадай қорытынды шығады: егер T сызықты операторы A_i -ден $N_{p_i,\infty}(M)$ -ге шектеулі әрекет етсе, $i = 0{,}1$, онда T операторы $T: A_{\theta,q} \to N_{p,q}(M)$, түрінде де шектеулі болады, мұндағы $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $0 < \theta < 1$, $0 < q \leqslant \infty$.

Сондықтан, маңызды сұрақ туындайды: қандай жағдайларда төмендегі теңдік орындалады?

$$\left(N_{p_0,q_0}(M), N_{p_1,q_1}(M)\right)_{\theta,q} = N_{p,q}(M). \qquad (2)$$

Торлы кеңістіктер функционалдық талдауда ерекше рөл атқарады, себебі олар көптеген маңызды қасиеттерге ие. Солардың бірі – мұндай кеңістіктер шкаласының кейбір интерполяциялық әдістерге қатысты тұйық (жабық) болуы.
Бұл қасиет әлсіз (weak) операторлық бағалаулардан күшті (strong) бағалаулар алуға мүмкіндік береді.

Сондықтан, торлы кеңістіктерді қамтитын және олардың интерполяциялық сипаттарын сақтайтын жалпыланған кеңістіктер шкаласын зерттеу өзекті болып табылады.

Жұмыстың мақсаты. Диссертациялық жұмыстың мақсаты — қандай торлар үшін сәйкес кеңістіктер шкаласы интерполяциялық болатынын зерттеу, сондай-ақ сызықты және сызықсыз операторлар үшін торлы кеңістіктерде $N_{p,q}(M)$, дискретті торлы кеңістіктерде $n_{p,q}(M)$) және анизотропты торлы кеңістіктерде $N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$ Марцинкевич типті интерполяциялық теореманың аналогын алу.

Зерттеу әдістемесі. Зерттеудің негізгі аппараты — торлы кеңістіктер үшін интерполяциялық әдістер, Марцинкевич типті интерполяциялық теоремалар (сызықты және сызықсыз операторлар үшін), Урыссон операторлары, сондай-ақ анизотропты торлы кеңістіктерге арналған интерполяциялық теоремалар болып табылады.

Ғылыми жаңалығы. Бұл жұмыста төмендегі жаңа нәтижелер алынған:

1. $N_{p,q}(M)$ торлы кеңістіктері үшін интерполяциялық теорема екі жағдайда дәлелденді: – M — $\mathbb{R}^n$-дегі диадикалық кубтар жүйесі болғанда; – M — координат осьтеріне параллель қырлары бар барлық кубтардың жиынтығы болғанда. Бірінші жағдайда, сәйкес $N_{p,q}(M)$ кеңістіктер шкаласы нақты интерполяция әдісіне қатысты тұйық екені көрсетілді. Екінші жағдайда, бейтарап (оң) функциялар конустары үшін Марцинкевич–Кальдерон теоремасының аналогы алынған.

2. $N_{p,q}(M)$ торлы кеңістіктері үшін интерполяциялық теорема дәлелденді. M локалды тор болған жағдайда, кеңістіктер шкаласының нақты интерполяция әдісіне қатысты тұйық екені көрсетілді.

3. Локалды торлар үшін $N_{p,q}(M)$ торлы кеңістіктерінде сызықты операторлар үшін Марцинкевич типті интерполяциялық теореманың аналогы дәлелденді.

4. Анизотропты торлы кеңістіктер $N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$ үшін интерполяциялық теорема дәлелденді, мұндағы M — $\mathbb{R}^n$-дегі диадикалық тор, $0 < \bar{p}_1 = (p_1^1, \dots, p_n^1) < \bar{p}_0 = (p_1^0, \dots, p_n^0) < \infty$, $0 < \bar{q}_0, \bar{q}, \bar{q}_1 \leqslant \infty$. Тор диадикалық параллелепипедтерден құралған жағдайында, анизотропты торлы кеңістіктердің интерполяция нәтижесі дәл осы кеңістіктердің терминдерімен өрнектелетіні көрсетілді.

5. Дискретті торлы кеңістіктер $n_{p,q}(M)$ үшін интерполяциялық теорема дәлелденді, мұндағы M — $\mathbb{Z}$-тегі бүтін ұштары бар барлық кесінділердің жиынтығы. Тиісті кеңістіктер шкаласы нақты интерполяция әдісіне қатысты тұйық екені анықталды.

6. Локалды торлар негізінде құрылған дискретті торлы кеңістіктер $n_{p,q}(M)$ үшін Марцинкевич типті интерполяциялық теореманың аналогы алынды.

7. Сондай-ақ, $N_{p,q}(M)$) торлы кеңістіктерінде Урыссон сызықты емес интегралдық операторлары үшін Марцинкевич типті интерполяциялық теорема дәлелденді.

Теориялық және практикалық маңыздылығы. Интерполяция теориясы қазіргі уақытта белсенді дамып келе жатыр және математиканың түрлі салаларында, сондай-ақ қолданбалы пәндерде кеңінен қолданылады. Алынған нәтижелер мен тұжырымдар теориялық тұрғыдан маңызды және оларды математиканың және оның қолданбалы салаларының келесі бағыттарында қолдануға болады: гармониялық талдау, дифференциалдық теңдеулер, операторлар теориясы, стохастикалық процестер және функционалдық кеңістіктер теориясы.

Торлы кеңістіктердің интерполяциялық қасиеттерін және олардың операторлар анализіне қолданылуын зерттеу осы бағыттағы болашақ ғылыми жұмыстарға жаңа мүмкіндіктер ашады. Жүргізілген зерттеу функциялар теориясы мен функционалдық талдау саласындағы мамандар үшін қызығушылық тудырады. Алынған нәтижелер қолданбалы әлеуетке ие, өйткені әлсіз бағалаулардан күшті бағалауларды алу әдістемесі көптеген қолданбалы есептерде тиімді болып табылады.

Жұмыстың апробациясы. Диссертациялық жұмыстың негізгі нәтижелері келесі ғылыми іс-шараларда баяндалып, талқыланды:

- Халықаралық ғылыми конференцияларында: XVI Халықаралық студенттер, магистранттар және жас ғалымдар конференциясы «Ломоносов–2020» (Нұр-Сұлтан, 2020); Еуразиялық жастар форумы «Еуразия – ынтымақтастық, бейбітшілік және келісім кеңістігі», М.В. Ломоносов атындағы ММУ Қазақстан филиалының 20 жылдығына арналған (Нұр-Сұлтан, 2021); XVII Халықаралық студенттер, магистранттар және жас ғалымдар конференциясы «Ломоносов–2022» (Астана, 2022); Seventh International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2024) (Анталия, Түркия, 2024);

- Ғылыми семинарда: «Математиканың қазіргі мәселелері» ғылыми семинары (жетекшісі – профессор Е.Д. Нурсултанов), М.В. Ломоносов атындағы ММУ Қазақстан филиалы (Астана, 2021, 2025);

- Арнайы семинарда: «Математикалық талдау және функциялар теориясы» бойынша арнайы семинар, С.М. Никольский атындағы РУДН математикалық институты, жетекшісі профессор В.И. Буренков (Мәскеу, 2022);

- Аймақтық ғылыми семинарда: «Функционалдық талдау және оның қолданылуы» атты аймақтық ғылыми семинар (жетекшілері: академик М. Отелбаев, академик Р. Ойнараов, профессор Е.Д. Нурсултанов, профессор К.Н. Оспанов) (Астана, 2025).

Жарияланымдар. Диссертацияда баяндалған негізгі материал алты ғылыми журналда және бес халықаралық ғылыми конференция жинақтарында жарияланған.

1. Interpolation methods for anisotropic net spaces, Eurasian Math. J., – 2024. – № 15:2. – P. 33–41.

2. Interpolation Properties of Certain Classes of Net Spaces, Lobachevskii J Math. – 2023. – Vol. 44. – P. 1870-1878.

3. Marcinkiewicz’s interpolation theorem for linear operators on net spaces, Eurasian Math. J. – 2022. – №13:4. – P. 61-69.

4. Interpolation of nonlinear integral Urysohn operators in net spaces, Bulletin of the Karaganda university Mathematics series. – 2022. – № 1(105). – P. 66-73.

5. Интерполяционная теорема для анизотропных сетевых пространств, Изв. вузов. Матем. – 2021. – №8. – Б. 3-15.

6. Interpolation theorem for discrete net spaces, Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. – 2023. – Vol. 120, №4. – P. 24-31.

7. On the interpolation properties of certain classes of discrete net space, халықаралық ғылыми-практикалық конференция «Анализ, дифференциалдық теңдеулер және олардың қолданылуы», профессор Т.И. Амановтың 100 жылдығына арналған (Астана, 2023. – С. 60-62).

8. International properties of Net spaces, дәстүрлі халықаралық сәуір математикалық конференциясы, ҚР Ғылым қызметкерлері күніне және академик Т.Ш. Кальменовтың 75 жылдығына арналған (Алматы, 2021. – С. 88-89).

9. Об интерполяционных свойствах сетевых пространств, Еуразиялық жастар форумы «Еуразия – ынтымақтастық, бейбітшілік және келісім кеңістігі», М.В. Ломоносов атындағы ММУ Қазақстан филиалының 20 жылдығына арналған (Нұр-Сұлтан, 2021, – С. 27-28).

10. Interpolation theorem for Net spaces, XVII Халықаралық студенттер, магистранттар және жас ғалымдар конференциясы «Ломоносов–2022» (Нұр-Сұлтан, 2022, – С. 28-29).

11. Об интерполяционных свойствах одного класса сетевых пространств, XVI Халықаралық студенттер, магистранттар және жас ғалымдар конференциясы «Ломоносов–2020» (Нұр-Сұлтан, 2020,– С. 27-29).

Диссертацияның құрылымы мен көлемі. Жұмыс көлемі 77 беттен тұрады және ол кірісπеден, сегіз бөлімнен, қорытындыдан, әдебиеттер тізімінен және 48 жарияланымдар тізімінен тұрады. Мәтіндегі тұжырымдар екі индекстен тұратын нөмірлермен белгіленген: бірінші индекс – бөлім нөмірі, екіншісі – сол бөлімдегі тұжырымның жеке нөмірі.

Бірінші бөлімде $N_{p,q}(M)$ торлы кеңістіктері мен $n_{p,q}(M)$ дискретті торлы кеңістіктерін зерттеу қарастырылады. Бөлімде торлы кеңістіктердің теориялық негіздері, олардың анықтамалары, маңызды теоремалар, сондай-ақ эквивалентті нормалаулар мен қасиеттері берілген.

Екінші бөлімде $N_{p,q}(M)$ торлы кеңістіктерінің интерполяциялық қасиеттері зерттеледі, мұнда M — $\mathbb{R}^n$-дегі диадалық кубтар жиыны, сондай-ақ M — координаталық осьтерге параллель қырлары бар барлық кубтар жиынтығы болған жағдай қарастырылады. Егер M — диадалық кубтар жиыны болса, онда кеңістіктер шкаласы нақты интерполяциялық әдісіне қатысты тұйық болатыны көрсетілді. Екінші бөлімнің негізгі нәтижесі келесі теорема болып табылады:

Теорема 1. Егер $0 < p_0 < p_1 < \infty$ және $0 < q_0, q_1, q \leqslant \infty$ болсын. M — диадалық кубтар жиыны болсын. Онда

$$(N_{p_0,q_0}(M), N_{p_1,q_1}(M))_{\theta,q} = N_{p,q}(M),$$

мұндағы $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1},\ \theta \in (0,1)$.

Егер M — координаталық осьтерге параллель қырлары бар барлық кубтар жиыны болса, онда Марцинкевич–Кальдерон теоремасына ұқсас нәтиже оң функциялар конустарында келесі түрде беріледі:

Теорема 2. Егер $n \leqslant p_0 < p_1 < \infty,\ 0 < q \leqslant \infty,\ M$ — $\mathbb{R}^n$-дегі координаталық осьтерге параллель қырлары бар барлық кубтар жиыны $G = \{f : f(x) \geqslant 0\}$, болса, онда кез $f \in G \cap N_{p,q}(M)$ үшін

$$\| f \|_{(N_{p_0,q_0}(M), N_{p_1,q_1}(M))_{\theta,q}} \asymp \| f \|_{N_{p,q}(M)},$$

мұндағы сәйкес константалар тек $p_i, q_i, \theta, q, i = 0{,}1$ параметрлеріне тәуелді.

Үшінші бөлімде торлы кеңістіктер үшін (2) теңдігі орындалатыны, яғни егер желі локалды болса, кеңістіктер шкаласы нақты интерполяциялық әдісіне қатысты тұйық болатыны дәлелденеді. Үшінші бөлімнің негізгі нәтижесі келесі интерполяциялық теорема болып табылады:

Теорема 3. Егер $0 < p_0 < p_1 < \infty, \quad 0 < q \leqslant \infty,\ 0 < \theta < 1$ болсын. Егер $G = \{G_t\}_{t>0}$ — локалды тор болса, онда

$$\left(N_{p_0,q_0}(G), N_{p_1,q_1}(G)\right)_{\theta,q} = N_{p,q}(G),$$

мұндағы$1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$.

Төртінші бөлімде $N_{p,q}(M)$ торлы кеңістіктерінің интерполяциялық қасиеттері және олардың сызықтық операторларды талдаудағы қолданылуы зерттеледі. Марцинкевич типіндегі интерполяциялық теореманың аналогы келтіріледі, ол локалды торлаар жағдайында операторлардың әлсіз шектелгендігінен күшті шектелгендігін алуға мүмкіндік береді. Бұл бөлімде Морри кеңістіктеріне арналған осындай теореманың аналогы алынған еңбектердегі идеялар пайдаланылған.

Теорема 4. Айталық $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $G = \{G_t\}_{t>0}$ — локалды тор, $F = \bigcup_{x\in\Omega} (G + x)$ болсын. Егер $1 < p_0 < p_1 < \infty$ и $0 < q_0, q_1 \leqslant \infty$, $q_0 \neq q_1$, $0 < \theta < 1$, $1 \leqslant \tau \leqslant \infty$, және

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

болса, ал сызықтық оператор T үшін кейбір $M_0, M_1 > 0$ мәндерімен келесі теңсіздіктер орындалса:

$$\| Tf \|_{N_{q_i,\infty}(G+x)} \leqslant M_i \| f \|_{Np_i,1(G+x)}, \quad \forall\, x \in \Omega, \quad i = 0,1,$$

онда кез келген $f \in N_{p,\tau}(F)$ үшін

$$\| Tf \|_{N_{q,\tau}(F)} \leqslant c M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \| f \|_{N_{p,\tau}(F)},$$

мұндағы $c > 0$ — тек $p_0, p_1, q_0, q_1, p, q, \tau, \theta$ параметрлеріне тәуелді константа.

Бесінші бөлімде $N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$ анизотропты торлы кеңістіктері үшін интерполяциялық теорема дәлелденеді. Мұнда M — $\mathbb{R}^n$-дегі диадалық тор, $0 < \bar{p}_1 = (p_1^1, \ldots, p_n^1) < \bar{p}_0 = (p_1^0, \ldots, p_n^0) < \infty$, $0 < \bar{q}_0, \bar{q}, \bar{q}_1 \leqslant \infty$. Көпөлшемді интерполяциялық әдіске қатысты $N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$ кеңістіктер шкаласы тұйық болатыны көрсетілді.

Теорема 5. Егер M — $\mathbb{R}^n$-дегі диадалық тор, $0 < \bar{p}_1 = (p_1^1, \ldots, p_n^1) < \bar{p}_0 = (p_1^0, \ldots, p_n^0) < \infty$, $0 < \bar{q}_0, \bar{q}, \bar{q}_1 \leqslant \infty$, $0 < \bar{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_n) < 1$ болса, онда

$$(N_{\bar{p}_0,\bar{q}_0}(M), N_{\bar{p}_1,\bar{q}_1}(M))_{\bar{\theta},\bar{q}} = N_{\bar{p},\bar{q}}(M),$$

мұндағы $\frac{1}{\bar{p}} = \frac{1-\bar{\theta}}{\bar{p}_0} + \frac{\bar{\theta}}{\bar{p}_1}$.

Белгілі болғандай, Лоренцтің дискретті кеңістіктері анализде маңызды рөл атқарады, себебі олар бірқатар ерекше қасиеттерге ие. Солардың бірі — Лоренц кеңістіктерінің шкаласы кейбір интерполяциялық әдістерге қатысты тұйық болады. Осыған байланысты, сызықтық операторлардың әлсіз бағаларынан күшті бағаларды алу мүмкіндігі бар. Сондықтан, Лоренц кеңістіктеріне қарағанда кеңірек және интерполяциялық қасиеттерін сақтайтын жаңа кеңістіктер шкаласын орнату өзекті мәселе болып табылады.

Алтыншы бөлімде дискретті торлы кеңістіктер $n_{p,q}(M)$ үшін интерполяциялық қасиеттер зерттеледі. Мұнда M — бүтін сандар жиынындағы барлық ақырлы кесінділер жиыны, яғни қадамы 1-ге тең ақырлы арифметикалық прогрессиялар. Біз нақты интерполяциялық әдісті түрлендіріп, жаңа торлы кеңістіктер шкаласының интерполяцияға қатысты тұйық екенін дәлелдедік:

Теорема 6. Егер $1 < p_0 < p_1 < \infty$ *и* $0 < q_0, q_1, q \leqslant \infty$болса, ал M — $\mathbb{Z}$ -тегі барлық кесінділер жиыны болса, онда

$$(n_{p_0,q_0}(M), n_{p_1,q_1}(M))_{\theta,q} = n_{p,q}(M),$$

мұндағы $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $\theta \in (0,1)$.

Жетінші бөлімде дискретті торлы кеңістіктердегі сызықтық операторлар үшін Марцинкевич типіндегі интерполяциялық теорема алынды:

Теорема 7. $G = \{G_t\}_{t>0}$ — локалды тор болсын,
$F = \bigcup_{x\in\mathbb{Z}^n} (G + x)$ — осы тор арқылы тудырылған глобалды тор болсын. Егер $< p_0 < p_1 < \infty$ *и* $0 < q_0 \leqslant q_1 \leqslant \infty$, $0 < \theta < 1$, $1 \leqslant \tau \leqslant \infty$ және

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

болса, ал кейбір $M_0, M_1 > 0$ үшін сызықтық оператор T келесі теңсіздіктерді қанағаттандырса:

$$\| Ta \|_{n_{q_i,\infty}(G+x)} \leqslant M_i \| a \|_{n_{p_i,1}(G+x)}, \qquad x \in \mathbb{Z}^n,$$
$$a \in n_{p_i,1}(G + x), i = 0,1,$$

онда кез келген $a \in n_{p,\tau}(F)$ үшін төмендегі орындалады

$$\| Ta \|_{n_{q,\tau}(F)} \leqslant cM_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \| a \|_{n_{p,\tau}(F)},$$

мұндағы $c > 0$ — тек $p_0, p_1, q_0, q_1, p, q, \tau, \theta$ параметрлеріне тәуелді константа.

Сегізінші бөлімде $N_{p,q}(M)$ торлы кеңістіктерінің интерполяциялық қасиеттері зерттеледі, мұнда M — $\mathbb{R}^n$-дегі кез келген өлшенетін жиындар жүйесі. Бұл бөлімде Урыссон интегралдық операторы қарастырылады. Бұл оператор барлық сызықтық және сызықтық емес интегралдық операторларды жалпылайды. Урыссон операторы, жалпы жағдайда, квазисызықтық немесе субаддитивті оператор болмайды, сондықтан классикалық интерполяциялық теоремалар оған қолданылмайды. Осы жұмыста бұл операторлар класы үшін Марцинкевич типіндегі интерполяциялық теореманың аналогы алынған. Бұл теорема Урыссон операторлары үшін локалды торлардағы әлсіз бағалардан күшті бағаларды алуға мүмкіндік береді.

Теорема 8. Айталық $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $G = \{G_t\}_{t>0}$ — локалды тор, $F = \bigcup_{x\in\Omega} (G + x)$ болсын. Егер $0 < p_0 < p_1 < \infty$ и $0 < q_0, q_1 \leqslant \infty$, $q_0 \neq q_1$, $0 < \theta < 1$, $1 \leqslant \tau \leqslant \infty$ және

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

болса, ал кейбір $M_0, M_1 > 0$ үшін Урыссон операторы T келесі теңсіздіктерді қанағаттандырса:

$$\| T(f) - T(0) \|_{N_{q_i,\infty}(G+x)} \leqslant M_i \| f \|_{N_{p_i,1}(G+x)}, \qquad i = 0,1, \qquad \forall x \in \Omega,$$

онда кез келген $f \in N_{p,\tau}(F)$ үшін

$$\| T(f) - T(0) \|_{N_{q,\tau}(F)} \leqslant cM_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \| f \|_{N_{p,\tau}(F)},$$

мұндағы $c > 0$ — тек $p_0, p_1, q_0, q_1, p, q, \tau, \theta$ параметрлеріне тәуелді константа.